Geometria Analítica

Introdução

A Geometria Analítica trabalha a conversão entre dois tipos de representações – a geométrica e a analítica. As diferentes figuras geométricas com tratamento analítico já descritas até o século XVII, foram agrupadas e sistematizadas pelos trabalhos de René Descartes e Pierre de Fermat, a passaram a constituir esta sub-área da Matemática.

Um pouco de História

René Descartes (1596-1650) nasceu na França, de família nobre, recebeu suas primeiras instruções no colégio jesuíta de La Flèche, graduando-se em Direito, em Poitiers. Em 1637 escreveu seu mais célebre tratado, o "Discurso do Método", no qual expõe sua teoria de que o universo era todo feito de matéria em movimento e qualquer fenômeno poderia ser explicado por meio das forças exercidas pela matéria contígua. Ficou conhecido com o "pai da filosofia moderna". Esta teoria só foi superada pelo raciocínio matemático de Newton.
Suas idéias filosóficas e científicas eram revolucionárias enquanto sua matemática guardava fortes vínculos com a antiguidade; essa relação com o passado permitiu a Descartes a fundação da Geometria Analítica, escrevendo livros sobre a mesma. (BOYER, 2002, p.229)

Pierre de Fermat (1601-1665) nasceu na França e foi advogado em Toulouse e oficial do governo pela maior parte de sua vida. Dedicou-se a literatura e as ciências e a matemática, por prazer. Em 1636 Fermat propôs um sistema de geometria analítica semelhante àquele que Descartes proporia um ano depois. O trabalho de Fermat foi baseado na reconstrução do trabalho de outros matemáticos como Apolonio e Viète. Um trabalho semelhante conduziu Fermat para descobrir métodos similares para diferenciação e integração por máximos e mínimos. Publicou muito pouco de suas descobertas. (BOYER, 2002, p.238)

Podemos encontrar referências dos diversos matemáticos que ajudaram a construir esta ciência ao longo dos séculos. Além dos clássicos de História da Matemática, como o livro de Carl B. Boyer, também encontramos muitos trabalhos sobre os mesmos na internet. Uma biografia resumida dos principais matemáticos pode ser encontrada no site www.somatematica.com.br.

Adição de matrizes e suas propriedades

Imagine que você é gerente de uma fábrica de roupas e tenha que mostrar o desempenho da produção dos três primeiros meses do ano de 2006, solicita então ao diretor de produção esta informação. No dia seguinte você recebe o relatório nos seguintes termos:

"No mês de janeiro foram produzidas 2350 calças, 3150 camisas, 2200 camisetas e 1350 bermudas; no mês de fevereiro foram produzidas 3500 calças, 2150 camisas, 1900 camisetas e 1430 bermudas; no mês de março a produção foi de 2540 calças, 4260 camisas, 1200 camisetas e não foram produzidas bermudas."

Será que está é a melhor maneira de apresentação destes dados?
Como você os representaria?

Vamos sugerir a elaboração de uma tabela com os dados descritos acima.

Tabela 1: Produção da Fábrica no1º Trimestre de 2006

Produto	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Calças	2350	3500	2540
Camisas	3150	2150	4260
Camisetas	2200	1900	1200
Bermudas	1350	1430	0

Ficou mais fácil para interpretar os dados, não é?

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

A esse conjunto de dados dispostos em linhas e colunas denominamos de Matriz.

As matrizes aparecem com muita freqüência nas diversas áreas como Administração, Economia, Engenharia, na Genética, Estatística, entre outras. São também muito importantes para a solução de problemas que envolvem Sistemas Lineares.

Assim, uma Matriz A do tipo $m \times n$ é um quadro composto de m linhas e n colunas, cuja representação é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

. Os índices indicam a linha e a coluna do elemento.

De modo simplificado a matriz A é representada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, onde A é o nome da matriz (sempre em letra maiúscula), a_{ij} representa o elemento da matriz situado na linha i e na coluna j, onde $i \in \{1,2,3,...,m\}$ e $j \in \{1,2,3,...,n\}$.
A matriz é representada entre parênteses ou colchetes.

Vamos a alguns exemplos:

Exemplo 1:

$$P = \begin{pmatrix} 2350 & 3500 & 2540 \\ 3150 & 2150 & 4260 \\ 2200 & 1900 & 1200 \\ 1350 & 1430 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de ordem 4×3 **(4 linhas e 3 colunas)**

Exemplo2:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de ordem 3 (3 linhas e 3 colunas)

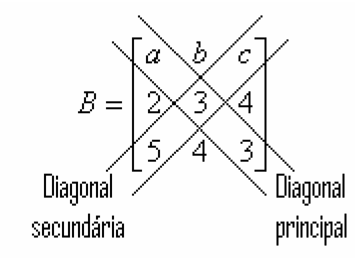
Exemplo 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz de ordem 2×3 (2 linhas e 3 colunas)

Observação: No exemplo 2 a matriz tem o numero de linhas igual ao número de colunas. Este tipo de matriz é denominado de **Matriz Quadrada**. Nas matrizes quadradas podemos identificar a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**.

No exemplo 2 acima:



Exemplo3:

Podemos também representar as matrizes por sentenças associadas aos índices i e j.

$C = (c_{ij})_{3\times 2}$ com $c_{ij} = i + 2j$

A matriz C é do tipo 3×2 cuja representação é:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}, \text{com} \begin{cases} c_{11} = 1 + 2.1 = 3 \\ c_{12} = 1 + 2.2 = 5 \\ c_{21} = 2 + 2.1 = 4 \\ c_{22} = 2 + 2.2 = 6 \\ c_{31} = 3 + 2.1 = 5 \\ c_{32} = 3 + 2.2 = 7 \end{cases}, \text{ou seja, } C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4:
Este é um tipo particular de matriz.

$D = [3 \quad -6 \quad 2]$ Matriz de ordem 1×3 (1 linhas e 3 colunas)

***Observação*: Quando a matriz é composta por uma única linha é denominada Matriz Linha**

Exemplo 5

É também um exemplo:

$E = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ Matriz de ordem 2×1 (2 linhas e 1 colunas)

***Observação*:** Quando a matriz é composta por uma única coluna é denominada Matriz Coluna

Exemplo 6:

Outro tipo de matriz pode ser representado pelo exemplo:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz G é uma **matriz identidade** de ordem 3, ou seja, é uma matriz quadrada onde os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1 e os demais são nulos.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Exemplo 7:
Existem também matrizes cujo valor é zero

$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matriz nula de ordem 2

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ Matriz nula de ordem 1×2

Reconhecidos os principais tipos de matrizes podemos agora tratar das operações com matrizes.

Operações com matrizes

Vamos inicialmente lembrar do exemplo da produção da fábrica de roupas da Tabela1. *E se tivéssemos também a produção do 1º trimestre de 2005. Qual seria a produção total de cada mês por item produzido?*

Tabela 1: Produção da Fábrica no1º Trimestre de 2006

Produto	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Calças	2350	3500	2540
Camisas	3150	2150	4260
Camisetas	2200	1900	1200
Bermudas	1350	1430	0

Tabela 2: Produção da Fábrica no1º Trimestre de 2005

Produto	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Calças	4150	3240	2520
Camisas	2150	2350	4420
Camisetas	2400	1650	1230
Bermudas	1550	1280	400

O que se pretende é somar os valores correspondentes das duas tabelas. Essa operação é chamada de Adição de Matrizes.

Usando a notação matricial podemos escrever:

$$\begin{pmatrix} 2350 & 3500 & 2540 \\ 3150 & 2150 & 4260 \\ 2200 & 1900 & 1200 \\ 1350 & 1430 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4150 & 3240 & 2520 \\ 2150 & 2350 & 4420 \\ 2400 & 1650 & 1230 \\ 1550 & 1280 & 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6500 & 6740 & 5060 \\ 5300 & 4500 & 8680 \\ 4600 & 3550 & 2430 \\ 2900 & 2710 & 400 \end{pmatrix}$$

Logo a produção total de cada mês por item produzido nos dois trimestres seria:

Tabela 3: Produção da Fábrica no1º Trimestre de 2005 e 2006

Produto	**Janeiro**	**Fevereiro**	**Março**
Calças	6500	6740	5060
Camisas	5300	4500	8680
Camisetas	4600	3550	2430
Bermudas	2900	2710	400

O que fizemos foi uma operação de adição de matrizes. Observe que a ordem das duas matrizes é a mesma. Essa é uma condição indispensável para que a adição possa ser efetuada.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Podemos então formalizar.
A adição de duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ do tipo $m \times n$, indicada por $(A + B)$, é a matriz $C = (c_{ij})$ onde, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

***Exemplo 1**:*
Vamos tratar de uma operação de adição.

Dadas as matrizes A e B, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

A subtração é também um caso de adição

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(subtração de matrizes)}$$

Exemplo 2:

Se A e B são matrizes e $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$ e $a_{ij\,2\times 2} = i + j$ e $b_{ij} = j - i$, podemos construir as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

A análise da operação de adição permite escrever algumas propriedades.

Propriedades da Adição

Se A, B e C são matrizes de mesma ordem valem as seguintes propriedades:
- Comutativa: A + B = B + A
- Associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- Elemento Neutro A + 0 = A
- Elemento Oposto A + (-A) = 0

***Observação*:** Uma matriz é nula quando todos os seus elementos são nulos.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Produto de um Número Real por uma Matriz

Esta operação permite multiplicar ou dividir os valores de uma matriz por um número real.

Uma matriz pode ser multiplicada por um número real. Para isto basta multiplicar cada número da matriz pelo número real.
Exemplo 1:
Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$, podemos escrever as matrizes:

a) $3.A = 3.\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{3}.B = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Observação: No exemplo b as matrizes foram divididas por (-3).

Matriz Transposta

Outra representação bastante comum é a chamada matriz transposta. A matriz transposta de uma matriz A de ordem m×n, indicada por A^t, é a matriz de ordem n×m que tem as suas linhas ordenadamente iguais as colunas da matriz A.

Exemplo 1
Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

Exemplo 2

Se $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 3 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$, então $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$

Matemática e informática

Softwares matemáticos são bastante comuns e facilmente encontrados. Um dos mais conhecidos para trabalhar com cálculo é o Derive.
Podemos utilizar o Derive para operar com matrizes, calcular determinantes e resolver sistemas lineares, além da muitas outras possibilidades.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Multiplicação de matrizes

As operações já vista são todas simples. A multiplicação de uma matriz por outra exige uma técnica mais apurada. Primeiro temos que avaliar se é possível multiplicar as matrizes. Na multiplicação o produto se dá entre linhas e colunas, assim, é imprescindível que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número linhas da segunda.

Vejamos um exemplo prático:
Um torneio de futebol conta com três times e o campeão do certame é aquele que obtiver um maior número de pontos após todos jogarem entre si, em turno e returno, de acordo com as tabelas 4 e 5.

Tabela 4: Placar Geral do Torneio

Times	Partidas Ganhas	Empates	Partidas Perdidas
Nacional	2	1	1
União	1	1	2
América	2	0	2

Tabela 5: Pontuação das partidas

Tipo	Pontos
Partidas Ganhas	3
Empates	1
Partidas Perdidas	0

Qual é a pontuação e classificação de cada time?

Podemos calcular a pontuação da seguinte forma:

Tabela 6: Pontuação dos times

Times	Pontuação
Nacional	2.3 + 1.1 + 1.0
União	1.3 + 1.1 + 2.0
América	2.3 + 0.1 + 2.0

Logo:

Tabela 7: Resultado final

Times	Pontuação
Nacional	7
União	4
América	6

O campeão é o Nacional, seguido pelo América e, por último, o União.

Fazendo a representação somente com as matrizes dos dados teremos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 3 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \\ 2\cdot 3 + 0\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

O procedimento realizado para chegar a pontuação de cada time é o que chamamos de multiplicação de matrizes.

É importante observar que o número de linhas da matriz dos dados da tabela 4 é exatamente igual ao número de colunas da tabela 5.

Podemos então multiplicar duas matrizes A e B se $A = [a_{ik}]_{m\times p}$ e $B = [b_{kj}]_{p\times n}$. O produto *A.B* será a matriz $C = [c_{ij}]_{m\times n}$, sendo que cada elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de *A* pelos elementos da j-ésima coluna de *B*. Notem que a matriz produto terá o número de linhas da matriz *A* e o número de colunas da matriz *B*.
Por exemplo, o elemento c_{23} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da segunda linha de A pelos elementos da terceira coluna de B

A multiplicação de matrizes não é comutativa: $A.B \neq B.A$

O esquema abaixo auxilia a avaliar as matrizes e o resultado da multiplicação:

$$A_{m\times p} \;.\; B_{p\times n} = C_{m\times n}$$

Vamos a alguns outros exemplos:

Exemplo 1

Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$ o produto *A.B* é possível pois o número de colunas de A (2) é igual ao número de linhas de B (2). O resultado será uma matriz C de ordem 3×4:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{pmatrix}.$$

Calculando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.(-2)+3.0 & 1.3+3.(-1) & 1.0+3.4 & 1.1+3.2 \\ 2.(-2)+4.0 & 2.3+4.(-1) & 2.0+4.4 & 2.1+4.2 \\ 5.(-2)+2.0 & 5.3+2.(-1) & 5.0+2.4 & 5.1+2.2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2} . \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}_{2\times 4} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 12 & 7 \\ -4 & 2 & 16 & 10 \\ -10 & 13 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

Exemplo 2

Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, vamos encontrar:

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

$$A\ .\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} . \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1.2+0.0 & 1.(-5)+0.4 \\ 4.2+3.0 & 4.(-5)+3.4 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$B\ .\ A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2.1+(-5).4 & 2.0+(-5).3 \\ 0.1+4.4 & 0.0+4.3 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} -18 & -15 \\ 16 & 12 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

Quando falamos do inverso a^{-1} de um número qualquer a, diferente de zero, verificamos que $a.a^{-1}=1$. Assim também, a inversa de uma matriz A, indicada por A^{-1}, quando existe, satisfaz a condição

$$A\ .\ A^{-1} = I_n \text{ e } A^{-1}\ .\ A = I_n$$

Na expressão: A é a matriz dada
A^{-1} é a matriz inversa de A
I_n é a matriz identidade de mesma ordem da matriz A

A matriz A é sempre uma matriz quadrada.

Exemplo 1

A matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix}$, pois $A\ .\ B = I$

Verificando:

$$A\ .\ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-3}{14} & \frac{4}{14} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7}.4+\frac{1}{7}.3 & \frac{1}{7}.(-2)+\frac{1}{7}.2 \\ \frac{-3}{14}.4+\frac{4}{14}.3 & \frac{-3}{14}.(-2)+\frac{4}{14}.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Determine a matriz inversa da matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Sabemos que C . $C^{-1} = I_n$.

Se representarmos $C^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando temos:

$$\begin{bmatrix} 2a-3c & 2b-3d \\ -1a+2c & -1b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Na igualdade encontramos os sistemas de equações

$\begin{cases} 2a - 3c = 1 \\ -a + 2c = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2b - 3d = 0 \\ -b + 2d = 1 \end{cases}$

Resolvendo os sistemas, encontramos a = 2, b = 3, c = 1 e d = 2.

Assim, a matriz inversa de C é $C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinantes de Matrizes

A teoria dos determinantes foi desenvolvida no final do século XVII por Leibniz e Kowa , simultaneamente na Alemanha e no Japão, ao procurarem a solução de sistemas com n equações e n incógnitas.

Um pouco de História

O matemático e filósofo alemão **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716), formou-se bacharel aos dezessete anos e é considerado um gênio universal e fundador de ciência moderna.
Ele antecipou o desenvolvimento de LÓGICA simbólica e, independentemente de Isaac Newton, inventou o cálculo com uma notação superior, incluindo os símbolos para diferenciação, dx e dy, e de integração , $\int ydx$. (BOYER, 2002, p.275)

O determinante de uma matriz A é indicada por detA ou por duas barras verticais e podem ser calculados somente de matrizes quadradas. A maneira de calcular o mesmo é que varia de acordo com a ordem da matriz.

Determinante de uma matriz de ordem 1

Dada uma matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$ seu determinante

$\det A = a_{11}$, ou $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

Por exemplo: o determinante da matriz $B = [6]$ é representado por $\det B = |6| = 6$

Observação: O determinante de uma matriz quadrada A é representado por $\det A$ ou com duas barras verticais. As barras verticais não devem ser confundidas com a simbologia adotada para representar valor absoluto ou módulo de um número.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Determinante de uma matriz de ordem 2

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o determinante é representado por

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Exemplo 1

Seja a matriz A da situação-problema 1:

$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule det$A$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 10 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \cdot 1 - 1 \cdot (-6) = 10 + 6 = 16$$

Exemplo 2

Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, calcule $\det B$.

$$\det B = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 = 10 + 2 = 12$$

Exemplo 3

Resolva a equação $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ x+1 & x-2 \end{vmatrix} = -3$

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ x+1 & x-2 \end{vmatrix} = -3$$
$$6(x-2) - 3(x+1) = -3$$
$$6x - 12 - 3x - 3 = -3$$
$$3x - 15 = -3$$
$$x = 4$$

$S = \{4\}$

Determinante de uma matriz de ordem 3

Para calcular o determinante de matrizes de ordem 3, entre as várias possibilidades, podemos utilizar uma regra muito prática, denominada de **regra de Sarrus**.

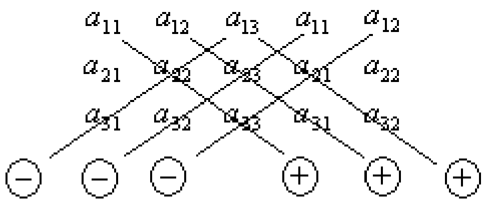
Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Vamos repetir as duas primeiras colunas a direita da matriz ou as duas primeiras linhas na parte inferior da matriz.

Repetindo as colunas ao lado temos:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$



Fazemos a multiplicação na direção da diagonal principal e depois na direção da diagonal secundária invertendo os sinais,

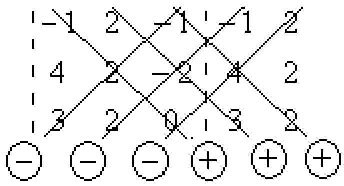
$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Exemplo 1

Agora vamos utilizar a regra de Sarrus para calcular o determinante de uma matriz. Lembramos que ela é apropriada para calcular o determinante de matrizes de ordem 3. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Escrevendo a matriz repetindo com a repetição das duas primeiras colunas temos:



$$\det A = (-1) \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 0 =$$
$$\det A = 0 - 12 - 8 + 6 - 4 - 0 = -18$$

Determinante de uma matriz de ordem 4

Para encontrar o determinante de uma matriz de ordem 4 ou maior, utilizamos, entre outras regras, o *Teorema de Laplace*. Este teorema envolve conceitos como *menor complementar* e *cofator*, que iremos discutir em seguida. O teorema de Laplace também pode ser utilizado para calcular o determinante de matrizes de qualquer ordem maior ou igual a 2.

Um pouco de História

Pierre Simon Laplace, foi um gênio reconhecido já na sua época. Nascido na Normandia em 1649, mudou-se para Paris para estudar com o famoso matemático francês Jean d'Alembert. Bem relacionado com a nobreza, foi autor de diversos trabalhos que o colocaram em posição de destaque no meio político, assumindo

cargos importantes em diversas ocasiões. Suas publicações diziam respeito principalmente a mecânica celeste. Entre outros, no "Tratado de Mecânica Celeste", Laplace reuniu tudo o que havia de esparso em trabalhos de vários cientistas, sobre as consequências da gravitação universal. Na Matemática, fez estudos profundos sobre a teoria das probabilidades - na obra "Teoria Analítica das Probabilidades" - e foi quem primeiro demonstrou integralmente o teorema de d'Alembert sobre as raízes das equações algébricas. Como físico, deixou estudos sobre refração, pêndulos, efeitos capilares, medidas barométricas, velocidade do som e dilatação dos corpos sólidos. (BOYER, 2002, p. 339)

Menor complementar

Denomina-se o menor complementar de uma matriz A quadrada de ordem maior que 2, do elemento a_{ij} escolhido, ao determinante D_{ij} da matriz obtida quando retiramos a linha e a coluna que contem o elemento a_{ij}.

Exemplo 1

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$, vamos calcular o menor complementar dos elementos a_{23}, a_{31} e a_{21}.

O menor complementar de a_{23} se dá pelo determinante da matriz formada pelos elementos da matriz A que não pertencem a linha 2 e coluna 3. Assim,

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 = -2 - 0 = -2.$$

Eliminando os elementos da 3ª linha e da 1ª coluna obtemos a matriz cujo determinante é o menor complementar do elemento a_{31}.

$$D_{31} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - (-3) \cdot 5 = -12 + 15 = 3$$

E também,

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 - (-3) \cdot (-1) = 36 - 3 = 33.$$

Cofator

O cofator de um elemento a_{ij} é dado pela expressão $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, isto é multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar do elemento.

Exemplo1

Da matriz do exemplo acima, vamos calcular os elementos cofatores A_{23}, A_{31} e A_{21}.

Resolução:

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot D_{23} = (-1)^5 \cdot (-2) = (-1) \cdot 2 = -2$$
$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} = (-1)^4 \cdot 3 = 1 \cdot 3 = 3$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot 33 = -1 \cdot 33 = -33$$

Teorema de Laplace

O teorema de Laplace, conforme já afirmamos, pode ser utilizado para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem maior ou igual a 2; o determinante é obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna escolhida pelos seus respectivos cofatores.

Vamos ver alguns exemplos:

***Exemplo 1*:**

Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Escolhendo-se a segunda linha, temos:

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= 0 \cdot (-1) \cdot (-4) + 3 \cdot 1 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \cdot (-4) = 0 + 24 + 20 = 44$$

Exemplo 2

Calcule o determinante da matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Escolhendo-se a quarta coluna, temos:

$$\det B = 0 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} +$$
$$+ 5 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1) \cdot 23 + 2 \cdot 1 \cdot 15 + 1 \cdot (-1) \cdot 22 + 5 \cdot 1 \cdot (-2) = 0 + 30 - 22 - 10 = -2$$

Observação: Note que a presença de zeros em alguma linha ou coluna facilita o cálculo do determinante (o produto sempre é igual a zero).

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Sistemas lineares

Os sistemas lineares são elaborados a partir de situações problema que estabelecem diferentes relações entre as incógnitas envolvidas. Vamos a uma situação:

João foi à feira três semanas seguida. Na primeira semana comprou 2 kg de bananas, 3 kg de manga e 5 kg de laranja e pagou R $ 21,00. Na segunda semana comprou 1 kg de banana, 2 kg de manga e 6 kg de laranja e pagou R$ 16,00. Na terceira semana comprou 2 kg de banana, 3 kg de manga e 6 kg de laranja e pagou R$ 22,00. Supondo que os preços não mudaram no decorre das 3 semanas, pergunta-se: Qual é o preço de um quilo de banana? De um quilo de manga? E de um quilo de laranja?

Para resolver o seguinte problema podemos usar a seguinte denominação:

- x é o preço do quilo da banana;
- y é o preço do quilo da manga;
- z é o preço do quilo da laranja.

Então o problema pode ser sintetizado na seguinte expressão: $\begin{cases} 2x+3y+5z=21 \\ x+2y+6z=16 \\ 2x+3y+6z=22 \end{cases}$, que recebe nome de sistema linear.

Como resolver este sistema? Antes vamos fazer algumas considerações sobre os sistemas em geral.

Cada sistema linear é composto de equações lineares, do tipo: $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$.

Em que: $a_1, a_2, ..., a_n$ são os coeficientes

$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas

b é o termo independente

Exemplo1:

A expressão $3x + 2y - 3z = -5$ é uma equação linear.

Um conjunto de equações lineares compõe um sistema linear, que pode ser representado da forma de *m* equações e *n* incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$, conforme modelo abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

- a_{ij} são os coeficientes;
- $b_1, b_2, ..., b_n$ são os termos independentes.

Observação.: se os termos $b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$, o sistema linear será dito homogêneo.

Exemplo2

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

O sistema linear $\begin{cases} 3x+2y-3z=0 \\ x-y+2z=0 \\ x-3y+5z=0 \end{cases}$ é homogêneo, pois os termos independentes são todos iguais a zero. Se o sistema linear homogêneo apresentar apenas a solução $x=y=z=0$, a solução é chamada **trivial**. Se admitir outras soluções, onde as incógnitas não são todas nulas, a solução será dita solução não trivial.

E como encontrar a solução? Um dos métodos mais conhecidos é a regra de Cramer. Vamos conferir.

Regra de Cramer

A regra de Cramer consiste num método para resolver um sistema linear, em que o número de equações e de incógnitas é o mesmo.

No sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$, com *m* e *n* iguais, temos que:

$x_1 = \dfrac{D_1}{D}$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D}$, $x_3 = \dfrac{D_3}{D}$ **,... ,** $x_n = \dfrac{D_n}{D}$ **;** sendo que, $S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é a solução do sistema.

Na representação:

- *D* é o determinante da matriz $m \times n$ dos coeficientes das incógnitas do sistema;
- D_1 é o determinante da matriz $m \times n$ dos coeficientes das incógnitas substituindo a 1ª coluna pelos termos independentes;
- $D_2, D_3, \ldots, D_n$, é o determinante da matriz $m \times n$ dos coeficientes das incógnitas substituindo a respectiva coluna (2, 3, ..., *n)* pelos termos independentes.

Observação: Como o *D* é um denominador, só teremos uma solução quando $D \neq 0$.

Voltando ao nosso problema da feira, do início da seção, vamos encontrar a solução:

Se $\begin{cases} 2x+3y+5z=21 \\ x+2y+6z=16 \\ 2x+3y+6z=22 \end{cases}$, então:

Calculamos $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, logo o sistema possível e determinado, e podemos seguir em frente.

Calculamos D_1, D_2, D_3, substituindo a 1ª, 2ª e 3ª coluna, respectivamente, pelos termos independentes da matriz.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 21 & 3 & 5 \\ 16 & 2 & 6 \\ 22 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 21 & 5 \\ 1 & 16 & 6 \\ 2 & 22 & 6 \end{vmatrix} = 4 \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 21 \\ 1 & 2 & 16 \\ 2 & 3 & 22 \end{vmatrix} = 1$$

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Podemos então encontrar os valores das incógnitas**:**

$x = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{2}{1} = 2$ $y = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{4}{1} = 4$ $z = \dfrac{D_3}{D} = \dfrac{1}{1} = 1$

Logo, $S = \{(2,4,1)\}$

E assim, na feira de João:

- Um quilo de banana custa R$ 1,00;
- Um quilo de manga custa R$ 4,00;
- Um quilo de laranja custa R$ 1,00.

Escalonamento de matrizes e resolução de sistemas

Um outro método muito eficiente para resolver sistemas lineares é o Método da Eliminação de Gauss . O método consiste em transformar o sistema linear original para se obter um sistema linear equivalente com mesmo conjunto solução , usando o método do escalonamento.

Podem ser efetuadas as seguintes operações que não alteram o conjunto solução dos sistemas :

- trocar as posições de duas equações ;
- multiplicar uma equação por uma constante não nula ;
- adicionar um múltiplo não nulo de uma equação a uma outra equação.

Efetuam-se as operações acima até obter a forma escalonada do sistema, equivalente ao sistema original.

Exemplo 1: Seja o sistema $\begin{cases} 2x+3y+5z=21 \\ x+2y+6z=16 \\ 2x+3y+6z=22 \end{cases}$

Vamos escrever a matriz dos coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, a matriz da incógnitas $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e a matriz dos termos independentes $B = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$.

O sistema linear original é equivalente a equação matricial $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 22 \end{pmatrix}$, ou seja, $AX = B$.

A matriz completa ou matriz ampliada é dada por $(A \mid B)$, ou seja, $\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 21 \\ 1 & 2 & 6 & 16 \\ 2 & 3 & 6 & 22 \end{array} \right\rangle$.

Sobre a matriz ampliada do sistema de equações efetuamos as operações possíveis e convenientes procurando eliminar os termos abaixo da diagonal principal da matriz dos coeficientes. No exemplo:

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 21 \\ 1 & 2 & 6 & 16 \\ 2 & 3 & 6 & 22 \end{array} \right\rangle \xrightarrow[L3=L3-l1]{L2=2L2-L1} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 21 \\ 0 & 1 & 7 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\rangle$$

Assim temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$, ou seja, na forma escalonada: $$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 21 \\ y + 7z = 11 \\ 1z = 1 \end{cases}$$

Resolvendo as equações obtemos os valores $x = 2$, $y = 4$ e $z = 1$.

Exemplo 2: Resolver o sistema $$\begin{cases} 2x + y + z + w = 11 \\ x + 2y - z - w = -2 \\ 2x + y + 2z - w = 6 \\ 3x - y - z + 2w = 6 \end{cases}$$

A equação matricial é $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$ e a matriz ampliada é $$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right\rangle$$

Escalonando temos:

$$\left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \end{array} \right\rangle \xrightarrow[L4=2.L4-3.L1]{\substack{L2=2.L2-L1 \\ L3=L3-L1}} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & 1 & -21 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{L4=3.L4+5.L2} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -30 & -12 & -138 \end{array} \right\rangle$$

$$\xrightarrow{L4=L4+30L3} \left\langle \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -72 & -288 \end{array} \right\rangle$$

Assim temos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -72 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ -5 \\ -288 \end{pmatrix}$$, ou seja, $$\begin{cases} 2x + y + z + w = 11 \\ 3y - 3z - 3w = -15 \\ 1z - 2w = -5 \\ -72w = -288 \end{cases}$$

Resolvendo as equações obtemos os valores $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $w = 4$.

Observação: Pode-se escalonar completamente uma matriz zerando todos os elementos exceto os da diagonal principal.

Exemplo 3: Seja o sistema $$\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 9 \end{cases}$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right\rangle \xrightarrow[L3=2.L3-3l1]{L2=2.L2-L1} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{L3=3.L3-L2} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right\rangle$$

$$\xrightarrow[L1=10.L1+L3]{L2=2.L2-L3} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 0 & 60 \\ 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right\rangle \xrightarrow{L1=3.L1+5.L2} \left\langle \begin{array}{ccc|c} 60 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & -6 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{array} \right\rangle$$

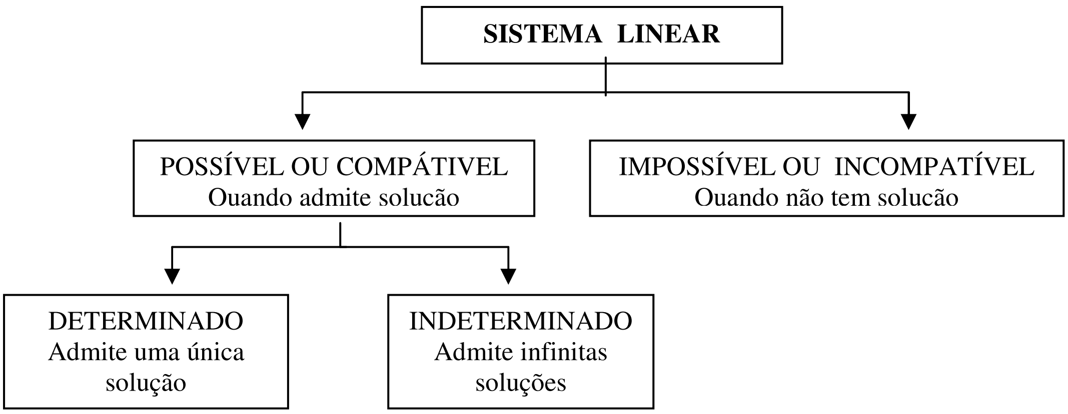
Assim temos: $\begin{cases} 60x = 120 \\ -6y = -12 \\ 10z = 10 \end{cases}$, ou seja, $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

Um pouco de História

Gabriel Cramer (1704-1752) trabalhou em análise e determinantes e publicou a conhecida regra de Cramer em 1750. Outros trabalhos não publicados como o de Leibniz, sem o conhecimento de Cramer, também inspiravam o uso de determinantes na resolução de sistemas. Cramer também estudou física e geometria. (BOYER, 2002, p. 297)

Soluções de um Sistema Linear

A classificação de um sistema linear quanto ao tipo de soluções está associada aos valores de D, D_1, D_2, ..., D_n. Vejamos no esquema:



Temos que:

- Se o determinante D é diferente de zero então o sistema linear n x n é possível e determinado ou, se o linear n x n é possível e determinado então D é diferente de zero;
- Se um sistema linear é possível e indeterminado então o determinante D é igual a zero e D_1, D_2, ..., D_n também são iguais a zero.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

- Se um sistema linear é impossível o determinante D é igual a zero e D_1 ou D_2 ou, ..., ou D_n são diferentes de zero.

Exemplo1

No sistema linear $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ x+2y=8 \end{cases}$ temos que $D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=7$. Como D é diferente de zero podemos garantir que o sistema é possível e determinado e tem uma única solução.

Exemplo2

O sistema linear $\begin{cases} 2x-3y=-5 \\ 4x-6y=-10 \end{cases}$ tem

$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=0$ $\quad D_1=\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix}=0$ $\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}=0$

Assim $x=\frac{D_1}{D}=\frac{0}{0}$ e $y=\frac{D_2}{D}=\frac{0}{0}$ que são indeterminações. O sistema é possível e indeterminado pois admite infinitas soluções.

Exemplo3

Já no sistema linear $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+6y=4 \end{cases}$ temos

$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$ $\quad D_1=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=10$

Como $D=0$ e $D_1\neq 0$, nem precisamos calcular D_2, pois $x=\frac{D_1}{D}=\frac{10}{0}$ é uma operação impossível. Portanto este sistema linear é impossível.

Sistema linear homogêneo

Um sistema linear é denominado homogêneo quando todos os coeficientes independentes de incógnitas se apresentem nulos. Todo sistema linear homogêneo admite a solução (0, 0, ...,0), chamada de solução trivial.

Exemplo 1

O sistema $\begin{cases} 2x-6y+z=0 \\ x-3y-4z=0 \\ x-2y-3z=0 \end{cases}$ é homogêneo e admite a solução $S=\{0,0,0\}$.

Observação: A solução trivial pode não ser a única solução do sistema.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

Interpretação gráfica da solução de um sistema linear

Equações lineares com duas variáveis representam retas num plano cartesiano, enquanto que, equações lineares com três variáveis representam planos no espaço tridimensional, como veremos nos capítulos 3 e 4 deste livro.

Os sistemas lineares podem ser resolvidos graficamente considerando essas representações:

- Sistemas lineares 2×2: as equações representam retas no plano cartesiano e a solução, caso exista, são os pontos comuns as duas retas.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1

1) Seja o sistema $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$, sua solução é *x* = *3* e *y* = *1*, um sistema possível e com única solução. Graficamente a solução corresponde ao ponto (3,1) do plano cartesiano.

Usando o software Graph, livre e disponível na internet no endereço http://www.padowan.dk/graph/, ou uma calculadora gráfica, podemos visualizar como na figura 7:

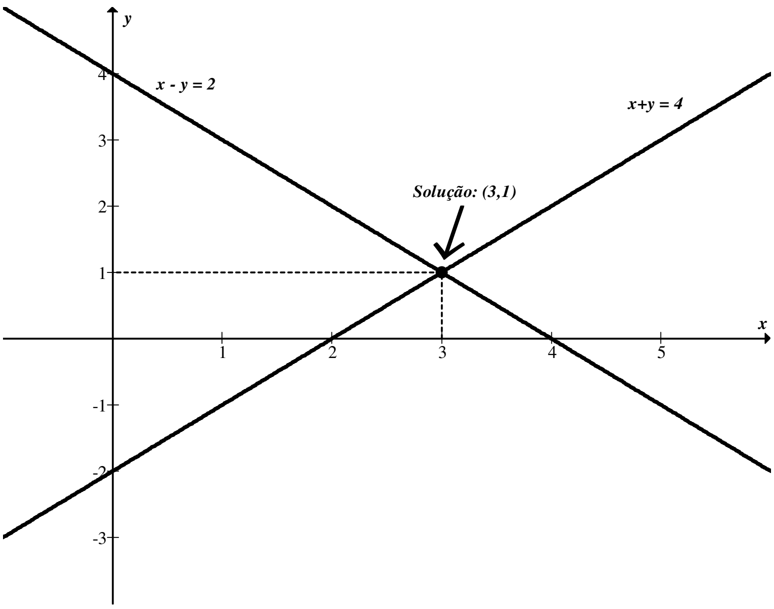


Figura 7: Solução gráfica de um sistema linear possível e determinado

Exemplo 2

2) No sistema $\begin{cases} x-3y=4 \\ 2x-6y=2 \end{cases}$, não há ponto comum às duas retas, o sistema é impossível, como na figura 8.

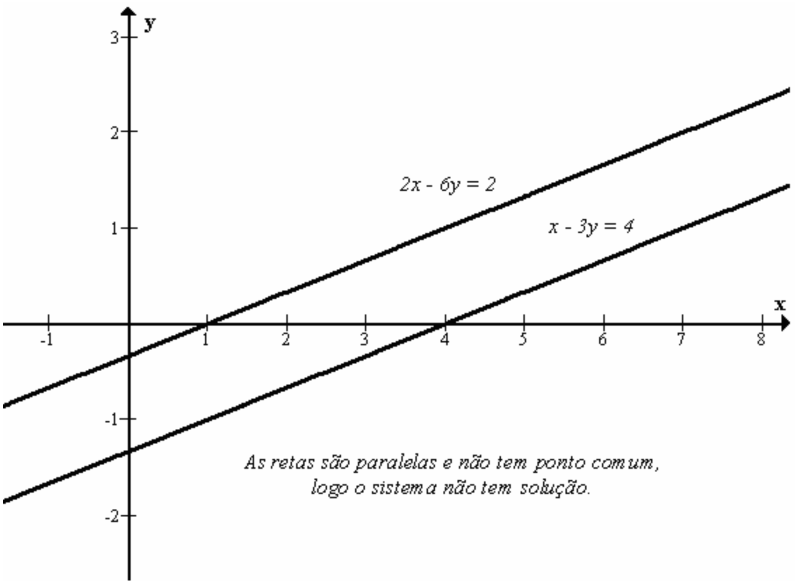


Figura 8: Solução gráfica de um sistema impossível

Exemplo 3

Neste, $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$, as retas coincidem, podemos concluir que há infinitos pontos em comum, logo o sistema é dito indeterminado, não há uma única solução, como na figura 9.

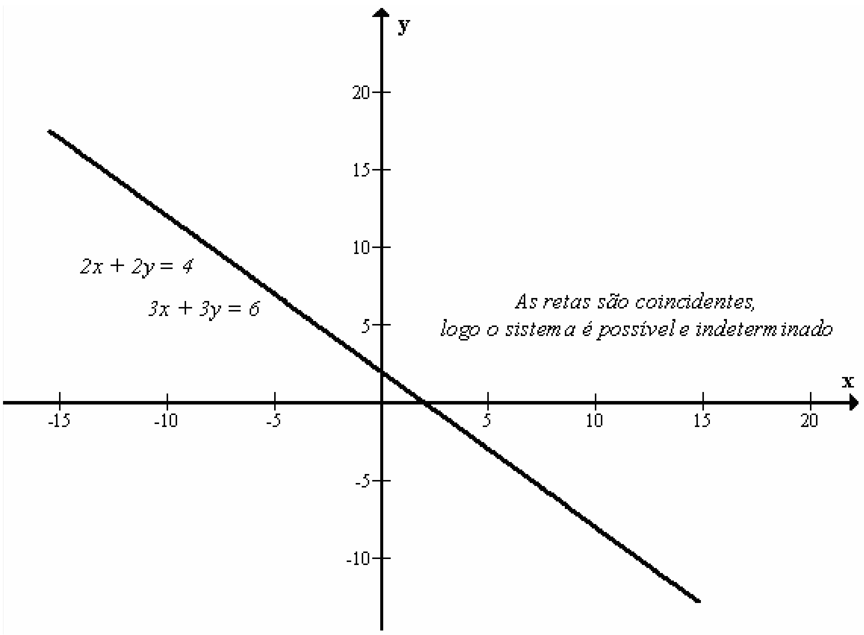


Figura 9: Solução gráfica de um sistema linear possível
e indeterminado

- Sistemas lineares 3×3: geometricamente num sistema linear 3×3, cada equação representa um plano no espaço. A solução corresponde aos pontos comuns entre os três planos, como na figura 10 onde, respectivamente, temos uma única solução, infinitas soluções e, nenhuma solução.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

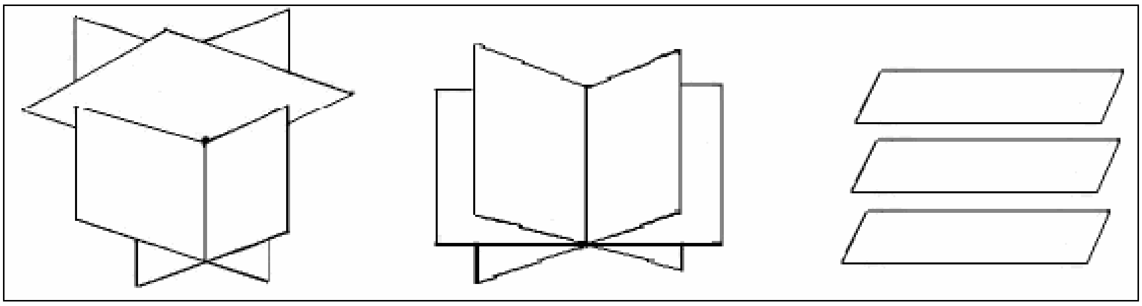


Figura 10: Solução gráfica de um sistema linear 3x3

Vejamos mais alguns exemplos:

Exemplo 4

No sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = -3 \end{cases}$, solução é x = 1, y = 2 e z = 4 que corresponde a tripla ordenada (1,2,4) no espaço tridimensional. Na figura 11 mostramos a tela do Derive com a visualização do ponto comum entre os planos do sistema.

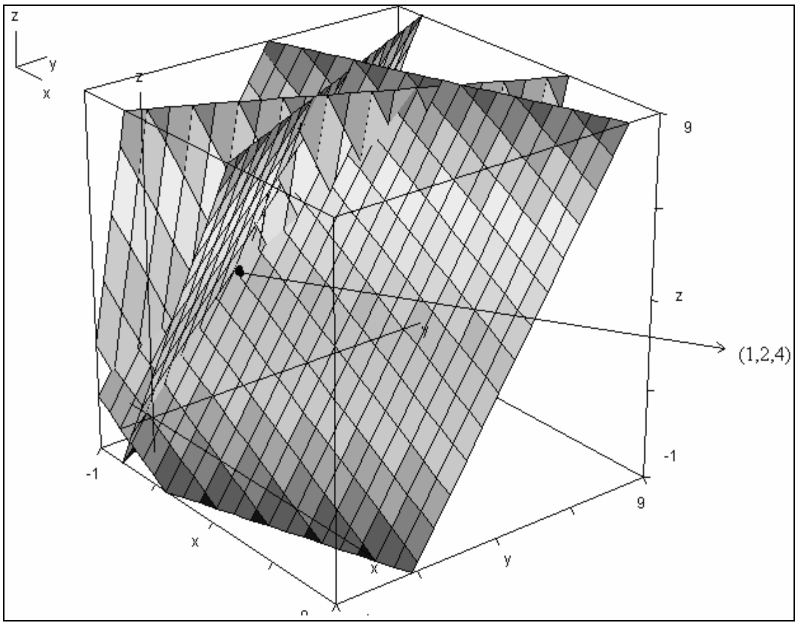


Figura 11: Solução do sistema linear 3x3

Exemplo 5

O sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ -x + 3y - 2z = -3 \end{cases}$ não tem solução, logo, os planos não tem ponto comum como na figura 12.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

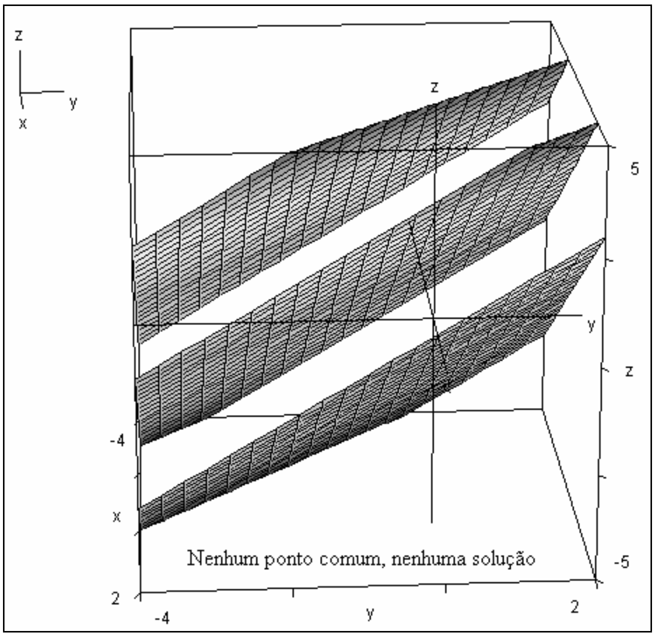


Figura 12: Sistema linear 3x3 impossível

Exercícios

1) 1) Construa a matriz $M = [m_{ij}]_{3\times 3}$, tal que $m_{ij} = (i + j)^2$.

2) Calcule o valor de *x* e *y* na igualdade:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -4 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & y \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

3) Se a matriz D é dada por $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, determine $(D^t)^2$.

4) Se as matrizes dadas são $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, determine o valor de A+ B, 2A – B, 3A e $\frac{1}{2}B$.

5) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$, qual é a matriz $C = 3 \cdot A + \frac{1}{3} \cdot B$?

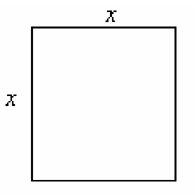
6) Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

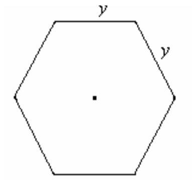
7) Calcule os determinantes das matrizes.

Prof. Mário Selhorst
e-mail: mario.selhorst@unisul.br

a) $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}2 & 4 & 1\\ -3 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$

8) A soma dos perímetros das figuras é de $48cm$. Sabendo que a diferença entre a medida do lado do quadrado e o lado do hexágono regular é de $2cm$, calcule a área de cada figura.





9) Resolva os sistemas de equações usando a regra de Cramer.

a) $\begin{cases}3x-2y=5\\ 2x-y=3\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x+3y=2\\ 4x-y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x-y+z=2\\ x+y-z=0\\ 3x-2y+3z=4\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+y+z=3\\ 2x-3y+z=-1\\ -x+y-2z=-3\end{cases}$ e) $\begin{cases}3x-y=1\\ 6x-2y=2\end{cases}$ f) $\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x+3y-3z=3\\ x-3y+3z=2\end{cases}$

12) Resolva os sistemas através de escalonamento.

a) $\begin{cases}4x+y+3z=1\\ 2x-2y+6z=11\\ -6x+3y+12z=-4\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y+z=7\\ 2x+y-z=9\\ x-2y+2z=2\end{cases}$ c) $\begin{cases}2x+y+z+w=1\\ x+2y+z+w=2\\ x+y+2z+w=3\\ x+y+z+2w=4\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+y+z+t=11\\ x-y-z-t=-9\\ -x+y-z-t=-7\\ -x-y+z-t=-5\end{cases}$ e) $\begin{cases}x+y+z+w+t=6\\ x-y+z-w+t=-4\\ 2x+y+2z+w+t=10\\ x+y-z-w-t=0\\ 3x+2y+z-2w-4t=6\end{cases}$

13) Com o objetivo de verificar o consumo de algumas mercadorias do supermercado, Isabel anotou as quantidades consumidas nos três meses anteriores com a compra de carne, peixe e frango e percebeu que esqueceu de registrar o preço de cada um destes produtos. No primeiro mês registrado consumiu 6,35 kg de carne, 3,60 kg de peixe e 9,80 kg de frango; no segundo mês consumiu 4,65 kg de carne, 5,80 kg de peixe e 8,20 kg de frango; e no terceiro, 5,10 kg de carne, 6,10 kg de peixe e 8,50 kg de frango. Determine o preço de cada uma das mercadorias sabendo que gastou R$ 83,70 no primeiro mês, R$ 78,60 no segundo mês e R$ 83,55 no terceiro mês.